

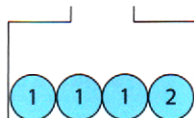
EXERCICES RÉSOLUS

1 Identifier une loi uniforme discrète

Dans chaque cas, dire si la variable aléatoire définie suit une loi uniforme discrète.

a) On lance une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on obtient Pile et la valeur 2 sinon.

b) On tire au hasard une boule dans l'urne ci-contre. Y est la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro de la boule tirée.



solution

a) La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1; 2\}$.

De plus, $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$.

Donc X suit la loi uniforme sur $\{1; 2\}$.

b) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1; 2\}$.

De plus, $P(Y = 1) = \frac{3}{4}$ et $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$. Donc $P(Y = 1) \neq P(Y = 2)$.

La variable aléatoire Y ne suit donc pas une loi uniforme.

Pour reconnaître une loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$, on vérifie que la variable aléatoire prend ses valeurs dans cet ensemble et que pour tout entier naturel i appartenant à $\{1; 2; \dots; n\}$, $P(X = i) = \frac{1}{n}$.

2 Identifier une épreuve de Bernoulli et calculer ses paramètres

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on appelle succès S : « Obtenir un Cœur ».

X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

a) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli. Présenter cette loi à l'aide d'un tableau.

b) Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

solution

a) Cette expérience est une expérience aléatoire à deux issues.

Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli. Un jeu de 32 cartes contient 8 cartes

Cœur, donc la probabilité de succès est $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

k	0	1
$P(X = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) $E(X) = p = \frac{1}{4} = 0,25$

$\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)}$ soit $\sigma(X) \approx 0,43$.

Pour justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, on montre que l'expérience a deux issues et on précise celle qui est le succès.

Loi uniforme discrète

Cours 1

Questions flash

À l'oral

23 On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le résultat donné par le dé. Dire oralement si X suit une loi uniforme.

24 Déterminer mentalement si la variable aléatoire X , dont la loi incomplète est donnée par le tableau ci-contre, suit une loi uniforme.

k	1	2	3
$P(X = k)$	0,3	0,3	

25 On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des valeurs obtenues. Dire oralement si X suit une loi uniforme.

26 On lance un dé à 6 faces dont la probabilité de sortie de chaque face est proportionnelle au numéro qu'elle porte.

La variable aléatoire X qui prend pour valeur le numéro de la face obtenue suit-elle une loi uniforme ?

27 Une urne contient quinze boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard de cette urne.

a) X est la variable aléatoire qui prend la valeur inscrite sur la boule. Quelle est la loi suivie par X ?

b) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

28 On lance deux dés équilibrés à quatre faces, numérotés 1, 2, 3 et 4.

X est la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus ou à leur valeur commune.

a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous qui recense les valeurs de X pour toutes les issues.

1 ^{er} dé \ 2 ^e dé	1	2	3	4
1	1	2		
2				
3				
4				

b) La loi suivie par X est-elle uniforme ?

29 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $E(X) = 8,5$. Quelle est la valeur de n ?

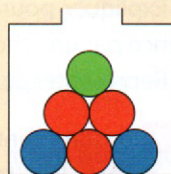
Épreuve et schéma de Bernoulli

Cours 2

Questions flash

À l'oral

30 Un joueur tire au hasard une boule de l'urne ci-contre. Il gagne s'il obtient une boule rouge.



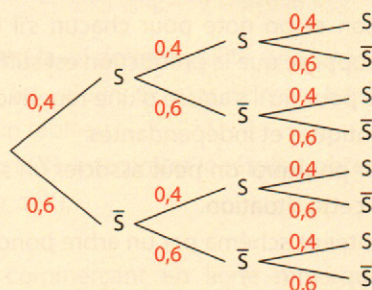
Expliquer oralement pourquoi il s'agit d'une épreuve de Bernoulli et préciser la probabilité du succès.

31 On lance un dé tétraédrique équilibré, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 et 4, puis on observe si on obtient un 4.



Associer oralement une épreuve de Bernoulli à cette expérience aléatoire en précisant le succès et sa probabilité.

32 Décrire un schéma de Bernoulli dont l'arbre ci-dessous serait une représentation.



Pour les exercices 33 à 35, associer une épreuve de Bernoulli à l'expérience aléatoire, définir le succès, l'échec et donner la loi de probabilité associée.

33 Dans une classe, il y a 39 élèves dont 14 internes, 20 demi-pensionnaires et 5 externes. On choisit un élève au hasard et on note s'il est interne.

34 Sur la liste électorale d'une ville, il y a 54 % de femmes. On choisit au hasard un nom de la liste et on note s'il s'agit d'une femme.

35 En France, la myopie touche environ 37 % des adultes. Au cours d'une visite médicale d'embauche, un médecin fait passer un test à un salarié pour déterminer s'il est myope.

36 Une urne contient 7 boules vertes et 3 boules noires.

On tire successivement avec remise de quatre boules. On note à chaque tirage s'il s'agit d'une boule verte.

- a) Expliquer pourquoi on peut modéliser cette expérience par un schéma de Bernoulli.
b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

37 Justine s'entraîne au tir à l'arc. Elle remarque qu'elle atteint la cible huit fois sur dix.

Elle tire trois flèches successivement. On suppose ses tirs indépendants.



- a) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

38 Une entreprise fabrique des composants électroniques. Les contrôles de qualité montrent que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0,02.

On prélève successivement trois composants dans la production et on note pour chacun s'il est défectueux. On suppose que la production est suffisamment importante pour qu'il s'agisse d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes.

- a) Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
b) Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

Pour les exercices 39 et 40, représenter la situation par un arbre et préciser si elle peut être modélisée par un schéma de Bernoulli. Si c'est le cas, décrire le schéma de Bernoulli correspondant.

39 On tire successivement avec remise trois cartes d'un jeu de 52 cartes et on note à chaque tirage s'il s'agit d'un Pique.

40 Dans une urne, on place les noms des élèves d'une classe : 19 filles et 16 garçons. On prélève simultanément deux noms et on observe pour chacun s'il s'agit d'un garçon ou d'une fille.

41 Un boulanger fabrique des pains de campagne qui doivent peser en théorie 600 grammes. Un contrôleur prélève au hasard 4 pains de campagne. Cette situation peut-elle être modélisée par un schéma de Bernoulli ?

Propriétés des coefficients binomiaux

Cours 2

Questions flash

À l'oral

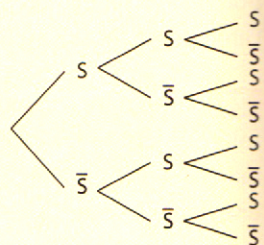
42 Utiliser cet arbre en « succès-échec » pour déterminer mentalement :

a) $\binom{3}{0}$

b) $\binom{3}{1}$

c) $\binom{3}{2}$

d) $\binom{3}{3}$



43 Sachant que $\binom{20}{16} = 4\,845$, en déduire mentalement $\binom{20}{4}$.

44 Sachant que $\binom{15}{12} = 455$ et que $\binom{15}{13} = 105$, calculer mentalement $\binom{16}{13}$.

45 n désigne un nombre entier naturel, $n \geq 1$. Exprimer $\binom{n}{1}$ en fonction de n .

46 Dans une usine, on répète 4 fois l'épreuve suivante : on choisit au hasard une pièce produite en série et on la teste pour détecter si elle est défectueuse. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre. En déduire les coefficients $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$.

47 Recopier et compléter ce triangle de Pascal pour déterminer :

a) $\binom{8}{3}$

b) $\binom{9}{2}$

$k \backslash n$	0	1	2	...
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
...				

48 On lance un dé équilibré dix fois successives et on s'intéresse au fait d'obtenir un 6.

a) Interpréter le coefficient binomial $\binom{10}{3}$.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer $\binom{10}{3}$.

49 Sur le triangle de Pascal de la p. 198, calculer la somme des coefficients binomiaux de chaque ligne. Émettre une conjecture.